**CHƯƠNG II:**

**BÀI 3: NHỊ THỨC NIUTƠN**

**PHÂN 1 – LÝ THUYẾT**

**1. Nhị thức Newton**

***Định lí:*** 



**2. Nhận xét**

Trong khai triển Newton  có các tính chất sau

\* Gồm có  số hạng

\* Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n

\* Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

\* Các hệ số có tính đối xứng: 

\* Số hạng tổng quát : 

**VD**: Số hạng thứ nhất , số hạng thứ k: 

**3. Một số hệ quả**

**Hệ qủa:** Ta có : 

Từ khai triển này ta có các kết quả sau

\* 

\* 

**PHẦN 2 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Dạng 1: Xác định hệ số của số hạng chứa  trong khai triển**

 với  ( là các hằng số khác nhau).

**Phương pháp giải:** Ta có:



Số hạng chứa  ứng với giá trị  thỏa: .

Từ đó tìm 

Vậy hệ số của số hạng chứa  là:  với giá trị  đã tìm được ở trên.

Nếu  không nguyên hoặc  thì trong khai triển không chứa , hệ số phải tìm bằng 0.

**Chú ý:** Xác định hệ số của số hạng chứa  trong khai triển

được viết dưới dạng.

Ta làm như sau:

\* Viết ;

\* Viết số hạng tổng quát khi khai triển các số hạng dạng  thành một đa thức theo luỹ thừa của x.

\* Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của .

**Ví dụ điển hình**

**Ví dụ 1.** Tìm hệ số của  trong khai triển đa thức của: 

**Lời giải.**

Đặt 

Ta có : 



Vậy hệ số của  trong khai triển đa thức của  ứng với  và  là: .

**Ví dụ 2.**Tìm hệ số cuả  trong khai triển đa thức 

**Lời giải.**

**Cách 1:**





Trong khai triển trên ta thấy bậc của  trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của  trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8. Do đó  chỉ có trong số hạng thứ tư, thứ năm với hệ số tương ứng là: .

Vậy hệ số cuả  trong khai triển đa thức  là:

.

**Cách 2:** Ta có:  ****

với .

Số hạng chứa **** ứng với  là một số chẵn.

Thử trực tiếp ta được  và .

Vậy hệ số của  là .

**Ví dụ 3.** Đa thức . Tìm 

**Lời giải.**

Ta có: 



với . Do đó  với các trường hợp

 hoặc  hoặc 

Vậy .

**Ví dụ 4.** Tìm hệ số không chứa  trong các khai triển sau , biết rằng  với 

**Lời giải.**

Ta có: 

.

Khi đó: 

Số hạng không chứa  ứng với 

Số hạng không chứa  là: 

**Ví dụ 5.** Với n là số nguyên dương, gọi  là hệ số của  trong khai triển thành đa thức của . Tìm  để 

**Lời giải.**

**Cách 1:**Ta có :

****

Dễ dàng kiểm tra ,  không thoả mãn điều kiện bài toán.

Với  thì dựa vào khai triển ta chỉ có thể phân tích

****

Do đó hệ số của **** trong khai triển thành đa thức của

 là : .

Suy ra  hoặc

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Cách 2:**

Ta có: 



Trong khai triển trên , luỹ thừa của  là  khi

.

Ta chỉ có hai trường hợp thoả mãn điều kiện này là  hoặc

(vì  nguyên).

Hệ số của **** trong khai triển thành đa thức của 

Là :.

Do đó hoặc

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Ví dụ 6.** Tìm hệ số của số hạng chứa trong khai triển nhị thức Newton của , biết .

**Lời giải.**

Do 



Mặt khác: 





.

Khi đó: 



Hệ số chứa  ứng với giá trị  .

Vậy hệ số chứa  là: .

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển 

**Bài 2** Tìm hệ số của  trong khai triển:

**Bài 3** Tìm hạng tử chứa  trong khai triển: 

**Bài 4** Cho khai triển  Tìm xem hạng tử thứ mấy chứa 

**Bài 5** (A - 2003) Tìm hệ số của số hạng chứa x8 trong khai triển biết rằng 

**Bài 6** Tìm hạng tử không chứa x trong các khai triển ; ; 

**Bài 7** Tìm hệ số của  trong các khai triển ; 

**Bài 8** Tìm hạng tử của các khai triển ;  là số nguyên

**Bài 9** Trong khai triển nhị thức tìm hệ số của số hạng có số mũ của a và b bằng nhau

**Bài 10\***  Tìm ?

**Bài 11**  . Tìm ?

**Bài 12**  . Tìm ?

**Bài 13\*** Tìm hệ số của hạng tử chứa  trong khai triển: 

**Bài 14** (A - 2004) Tìm hệ số của hạng tử chứa  trong khai triển: 

**Bài 15** (D - 2003) Với n là số nguyên dương, gọi a3n-3 là hệ số của x3n-3 trong khai triển thành đa thức của . Tìm n để a3n-3 = 26n

**Bài 16** Cho khai triển: 

Tính , , 

**Bài 17** (D - 2007). Tìm hệ số của  trong khai triển 

**Bài 18** Tìm hệ số của  trong khai triển 

**Dạng 2: Xác định hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn**

**Phương pháp giải:** Để xác định hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niutơn

Ta làm như sau:

\* Tính hệ số  theo  và ;

\* Giải bất phương trình  là hệ số lớn nhất cần tìm.

**Ví dụ điển hình**

**Ví dụ 1.** Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của: 

**Lời giải.**

Đặt 

Giả sử là hệ số lớn nhất 



.

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là .

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1\*** Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển: 

**Bài 2** Giả sử . Biết , Tìm n và hệ số lớn nhất trong các số 

**Bài 3** (A - 2008) Cho  trong đó . Biết . Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển 

**Bài 4** Xét khai triển . Tìm 

**Bài 5** Xét khai triển :. Tìm n để 

**Bài 6** Xét khai triển . Tìm n để 

**Dạng 3: Bài toán liên quan đến tổng .**

**Phương pháp 1**: Dựa vào khai triển nhị thức Newton

.

Ta chọn những giá trị  thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

\* 

\* 

\* 

\* 

\* .

**Phương pháp 2:** Dựa vào đẳng thức đặc trưng

- Mấu chốt của cách giải trên là ta tìm ra được đẳng thức (\*) và ta thường gọi (\*) là đẳng thức đặc trưng.

- Cách giải ở trên được trình bày theo cách xét số hạng tổng quát ở vế trái (thường có hệ số chứa ) và biến đổi số hạng đó có hệ số không chứa k hoặc chứa k nhưng tổng mới dễ tính hơn hoặc đã có sẵn.

**Ví dụ điển hình**

**Ví dụ 1.** Tìm số nguyên dương n sao cho: 

**Lời giải.**

Xét khai triển: 

Cho  ta có: 

Do vậy ta suy ra .

**Ví dụ 2.** Tính tổng sau: 

**Lời giải.**

Ta có: 

Vì  nên:

.

**Ví dụ 3.** Tính tổng sau: 

**Lời giải.**

Ta có: 

Vì  nên

.

**Ví dụ 4.** Chứng minh đẳng thức sau

**1.**  với 

**2.** 

**3.**  với .

**Lời giải.**

**1.** Xét khai triển:  (1)

Ta có thể khai triển  theo cách khác như sau

 (2)

Hệ số của  trong khai triển (1) là: 

Hệ số của  trong khai triển (2) là: 

Từ đó ta suy ra: .

**2.** Xét khai triển: 

Cho  ta có được:



Hay .

**3.** Ta có: 



Suy ra: .

**CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP**

**Bài 1** Chứng minh các đẳng thức sau:

**1**. 

**2**. 

**3**. .

**Bài 2** Tính các tổng sau:

**1.** 

**2.** 

**3.** .

**Bài 3:** Tính tổng 

**Bài 4:**

**1.**  Tính tổng 

**2.**  Tìm số nguyên dương n sao cho :



**3.**  Chứng minh: 

**4.**  Tính tổng 

**5.**  Chứng minh 

**Bài 5:** Tính các tổng sau

**1.** 

**2.** 

**3.** 

**4.** 

**5.** .

**Bài 6**

**1.** Cho . Chứng minh rằng: .

**2.** Chứng minh rằng là số tự nhiên chia hết cho  với

**.**

**3.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  thì tổng

 không chia hết cho .

**4.** Chứng minh rằng với mọi  luôn tồn tại  sao cho : .

**5.** Chứng minh rằng  là một số tự nhiên lẻ (trong đó  là kí hiệu phần nguyên của , tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá ).

**6.** Cho  là hai số tự nhiên,  là số nguyên tố. Giả sử





Chứng minh rằng:  (Quy ước ).

**Bài 7**  Chứng minh các đẳng thức sau

**1.** 

**2. **

**3.** 

**4.** 

**5.** 

**6.** 

**7.** 

**8.** 

**9.** .

**Bài 8**

**1.**  Cho là một đa thức bậc  thỏa mãn  với . Tính .

**2.** Hãy tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa , trong đó  là số các ước nguyên dương của .